SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ $|Z| = \dfrac{|z-1|}{|1-\overline{z}|} = \dfrac{|z-1|}{|1-\overline{z}|}$; or $|1-\overline{z}| = \overline{|1-\overline{z}|} = |1-z| = |z-1|$

d'où : $|Z| = \dfrac{|z-1|}{|z-1|} = 1.$

2°/ $\dfrac{Z-1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}-1}{z-1} = \dfrac{z+\overline{z}-2}{(z-1)(1-\overline{z})} = \dfrac{z+\overline{z}-2}{(z+\overline{z}-1-z\overline{z})}$

or : $z+\overline{z} = 2 \quad \Re é\, z \Rightarrow z+\overline{z} \in \mathbb{R}$ et $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0 \in \mathbb{R}$

et par suite $\dfrac{Z-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

3°/ $\dfrac{Z-1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{z-1}{1-\overline{z}}+1}{z-1} = \dfrac{z-\overline{z}}{(z-1)(1-\overline{z})} = \dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}-1-|z|^2}$

or : $z-\overline{z} = i \quad 2\,\mathrm{Im}\,(z)$ donc $z-\overline{z} \in i\mathbb{R}$ et $z+\overline{z}-1-|z|^2 \in \mathbb{R}^*$

d'où $\dfrac{Z-1}{z-1}$ est un nombre imaginaire pur.

4°/ $Z = \dfrac{z-1}{(1-\overline{z})} = \dfrac{(z-1)(1-z)}{|1-z|^2}$ (car $|1-z^2| = (1-\overline{z}).(1-z)$)

On pose $z = x + iy \Rightarrow 2z - z^2 - 1 = 2(x+yi) - (x+yi)^2 - 1$

$= -x^2 + y^2 + 2x - 1 + i(2y - 2xy)$

$Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(Z) = 0 \\ \text{avec } z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2xy = 0 \\ (x,y) \neq (1,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = 1 \\ (x,y) \neq (1,0) \end{cases}$$

L'ensemble est la réunion des deux droites D_1 : x = 1 et D_2 : y = 0 privé du point A (1,0)